



**METEMATYCZNY MODEL
OCENY
EFEKTYWNOŚCI NAUCZANIA**

**NA SZCZEBLU GIMNAZJALNYM I PODSTAWOWYM
METODĄ STANDARYZACJI WYNIKÓW OGÓLNYCH**

**Autor:
Dr Bogdan Stępień**

I. WSTĘP

Niniejsza praca to prezentacja modelu matematycznego oceny efektywności nauczania na szczeblu podstawowym i gimnazjalnym. Autor pragnie tą pracą zwrócić uwagę na możliwość dokonania w prosty sposób oceny jakościowej różnic w poziomie nauczania pomiędzy szczeblem podstawowym i gimnazjalnym gmin. Wszystkie wielkości użyte w prezentowanym modelu to wielkości średnie: gminne, wojewódzkie, mogą być również krajowe czy też powiatowe. Zaproponowany model nie służy do oceny pracy poszczególnych nauczycieli a do oceny efektywności nauczania w samorządach gminnych i powiatach jako całości, może być również wykorzystany do oceny efektywności nauczania w poszczególnych szkołach danego samorządu.

II. MODEL OCENY EFEKTYWNOŚCI NAUCZANIA

Zauważmy, że poziomy trudności egzaminu na szczeblu gimnazjalnym czy to podstawowym w poszczególnych latach są różne a ponadto poziomy te bardzo różnią się jeszcze pomiędzy szczeblem gimnazjalnym i podstawowym. Dodatkowo skale z egzaminu gimnazjalnego i sprawdzianu końcowego w szkołach podstawowych są również inne. Aby dane z poszczególnych lat i dane ze szczebla podstawowego i gimnazjalnego były porównywalne, abyśmy mówili zawsze np o jabłkach a nie raz o jabłkach a innym o gruszkach, wyniki ogólne musimy na wstępie poddać standaryzacji.

Dobrym pomysłem na standaryzowanie wyników ogólnych pod względem standaryzacji poziomu trudności egzaminu jest użycie średnich wyników ogólnych wojewódzkich z egzaminu gimnazjalnego i sprawdzianu końcowego w szkołach podstawowych jako odnośnika, standardu poziomu trudności. Pozbycie się z wyniku ogólnego skali wyników można zrealizować dzieląc wyniki ogólne z egzaminu/sprawdzianu przez skale egzaminu/sprawdzianu. Procedurę standaryzacyjną wyników ogólnych spełniającą powyższe oczekiwania przedstawia wyrażenie

$$e = \begin{cases} \alpha \frac{\varepsilon}{\varepsilon_w} & \text{dla } \varepsilon \leq \varepsilon_w \\ \alpha + (1 - \alpha) \frac{\varepsilon - \varepsilon_w}{S - \varepsilon_w} & \text{dla } \varepsilon > \varepsilon_w \end{cases}, \quad (1)$$

gdzie:

e - wystandaryzowany wynik ogólny (nazywany dalej wynikiem SWO) z egzaminu gimnazjalnego lub sprawdzianu końcowego w szkołach podstawowych a wartości jego są z przedziału od 0 do 1 i wynika to z samej konstrukcji procedury standaryzacyjnej,

ε - wynik ogólny z egzaminu gimnazjalnego lub sprawdzianu końcowego w szkołach podstawowych,

ε_w - wynik ogólny wojewódzki z egzaminu gimnazjalnego lub sprawdzianu końcowego w szkołach podstawowych,

$\alpha = \frac{1}{2} \left(\frac{\bar{\varepsilon}_{WP}}{S_p} + \frac{\bar{\varepsilon}_{WG}}{S_G} \right)$ - poziom standaryzacji (średni poziom trudności z egzaminu i sprawdzianu),

$\bar{\varepsilon}_{WP}$ - (np. trzyletnia) średnia wyniku ogólnego wojewódzkiego ze sprawdzianu w szkołach podstawowych,

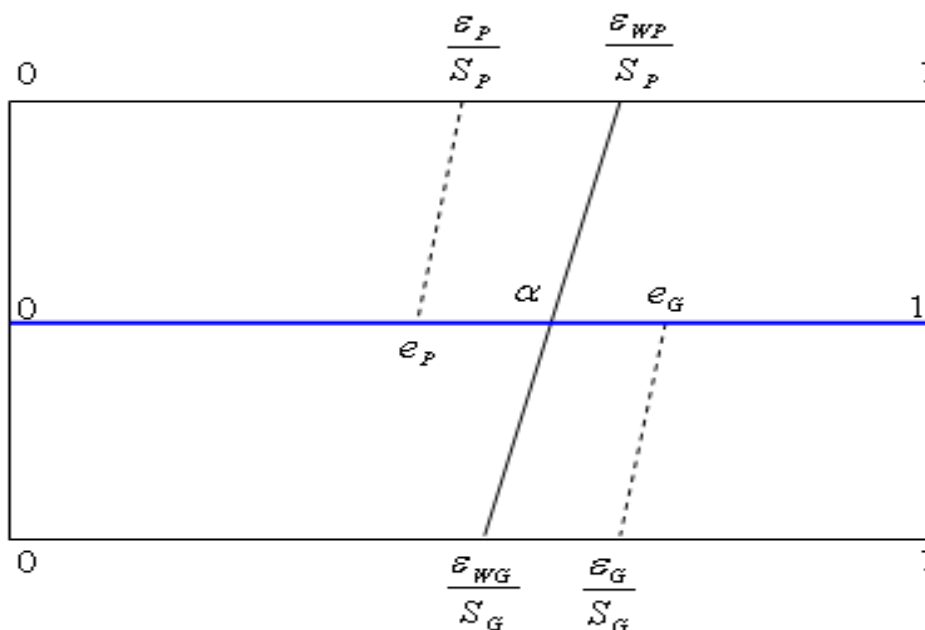
$\bar{\varepsilon}_{WG}$ - (również trzyletnia) średnia wyniku ogólnego wojewódzkiego, ale z egzaminu gimnazjalnego,

S_p - skala wyniku ogólnego ze sprawdzianu w szkołach podstawowych, wynosi 40,

S_G - skala wyniku ogólnego z egzaminu gimnazjalnego, wynosi 100 (50+50),

S - skala wyniku ogólnego ze sprawdzianu lub egzaminu (40 lub 100).

Graficzna prezentacja procedury standaryzacyjnej wyników ogólnych



Wynik SWO z egzaminu gimnazjalnego/sprawdzianu końcowego w szkołach podstawowych jest funkcją szeregu różnych parametrów. Zapiszmy ją w postaci:

$$e = e(x_1, \dots, x_n)$$

gdzie: x_1, \dots, x_n - zespół parametrów wpływających na wynik SWO z egzaminu/sprawdzianu.

Zastanówmy się, jakie warunki funkcja ta powinna spełniać.

Założmy, że jeden z parametrów x np. x_k jest parametrem/miara, który określa pracę dydaktyczną i wychowawczą zespołu nauczycielskiego w danej gminie na szczeblu gimnazjalny/podstawowym. Wyobraźmy sobie sytuację, że praca nauczycieli $x_k = 0$, wtedy wynik SWO z egzaminu powinien wynieść $e = e(x_1, \dots, x_{k-1}, 0, x_{k+1}, \dots, x_n)$. Widzimy, że wynik ten zależy tylko od pozostałych - pozaszkolnych parametrów, czyli od parametrów $(x_1, \dots, x_{k-1}, x_{k+1}, \dots, x_n)$ i jest przypisany do danej społeczności, gminy itp. Można by rzec, że jest pewnego rodzaju potencjałem początkowym danej społeczności, gminy, powiatu, województwa - do zdobywania wiedzy i tak będzie nazywany w pracy.

Na podstawie powyższego (nie wdając się w dokładne uzasadnienie), zakładam, że funkcję określającą wynik SWO z egzaminu można zapisać w postaci:

$$e(\bar{x}, g(y)) = v(\bar{x}) + (1 - v(\bar{x}))g(y), \tag{2}$$

gdzie:

$\bar{x} = (x_1, \dots, x_{k-1}, x_{k+1}, \dots, x_n)$ - zespół pozaszkolnych parametrów wpływający na wynik SWO,

$v(\bar{x}) = e(x_1, \dots, x_{k-1}, 0, x_{k+1}, \dots, x_n)$ - znormalizowana funkcja potencjału początkowego, (3)

y - miara pracy (dydaktycznej i wychowawczej) nauczycieli gminy danego szczebla ($y \geq 0$),

$g(y)$ - znormalizowana funkcja pracy nauczycieli przyjmująca wartości z przedziału $(0,1)$.

Znormalizowaną funkcję pracy $g(y)$ można uogólnić - zmodyfikować poprzez założenie, że jest funkcją dodatkowo potencjału początkowego $v(\bar{x})$. Przypadek ten omówiony jest w rozdziale IV. Dla prowadzonych w pracy wywodów nieistotna jest znajomość postaci funkcji $g(y)$ ważne jest jedynie to, że przyjmuje ona wartości z przedziału $(0,1)$ i że jest w funkcją rosnącą. Postać

znormalizowana funkcji miary pracy nauczycieli $g(y)$ to np. $g(y) = \frac{y}{y+a}$, gdzie $a > 0$.

III. ANALIZA MODELU OCENY NAUCZANIA

Czy na podstawie zaproponowanego modelu oceny efektywności nauczania pomimo nieznanomości potencjałów początkowych i problemów z wartościowaniem pracy nauczycieli można coś wnioskować?

Na podstawie wzoru (2) zapiszmy wyniki SWO z egzaminu gimnazjalnego i sprawdzianu końcowego dla gminy i województwa:

$$e_p(\bar{x}, w_p) = v(\bar{x}) + (1 - v(\bar{x}))w_p, \quad (4)$$

$$e_G(\bar{x}, w_G) = v(\bar{x}) + (1 - v(\bar{x}))w_G, \quad (5)$$

$$E_p(\bar{X}, W_p) = v(\bar{X}) + (1 - v(\bar{X}))W_p, \quad (6)$$

$$E_G(\bar{X}, W_G) = v(\bar{X}) + (1 - v(\bar{X}))W_G, \quad (7)$$

gdzie:

indeks P - dotyczy szkół podstawowych,

indeks G - dotyczy gimnazjów,

e - wynik SWO gminny,

E - wynik SWO wojewódzki,

\bar{x} - zespół parametrów pozaszkolnych gminy,

\bar{X} - zespół parametrów pozaszkolnych województwa,

w_p, w_G - znormalizowane prace nauczycieli w gminie,

W_p, W_G - znormalizowane prace nauczycieli w województwie.

Warto zauważyć, że wzory (4) i (5) różnią się tylko znormalizowanymi pracami nauczycieli. Funkcje potencjału początkowego w obu przypadkach są takie same, bo są przypisane do lokalnej społeczności a nie do szczebla nauczania. Podobnie rzecz się ma z wzorami (6) i (7). Zdefiniujmy teraz pojęcie względnego wyniku SWO gminy w stosunku do wyniku SWO wojewódzkiego dla sprawdzianu końcowego w szkołach podstawowych wzór (8) oraz egzaminu gimnazjalnego wzór (9)

$$Pw(\bar{x}, \bar{X}, e_p | E_p) = \frac{e_p(\bar{x}, w_p) - E_p(\bar{X}, W_p)}{E_p(\bar{X}, W_p)}, \quad (8)$$

$$Gw(\bar{x}, \bar{X}, e_G | E_G) = \frac{e_G(\bar{x}, w_G) - E_G(\bar{X}, W_G)}{E_G(\bar{X}, W_G)}. \quad (9)$$

Następnie zdefiniujmy pojęcie różnicy względnych wyników SWO gimnazjów i szkół podstawowych gminy

$$\Delta\Psi_{swO}(\bar{x}, \bar{X}, G | P) = Gw(\bar{x}, \bar{X}, e_G | E_G) - Pw(\bar{x}, \bar{X}, e_p | E_p). \quad (10)$$

Różnica ta określa wzrost/spadek względnego wyniku SWO z egzaminu gimnazjalnego w odniesieniu do sprawdzianu końcowego w szkołach podstawowych z terenu gminy.

$$\Delta\Psi_{swO}(\bar{x}, \bar{X}, G | P) = \frac{e_G(\bar{x}, w_G)}{E_G(\bar{X}, W_G)} - \frac{e_p(\bar{x}, w_p)}{E_p(\bar{X}, W_p)}. \quad (11)$$

Wykorzystanie definicji funkcji $e_p(\bar{x}, w_p)$, $e_G(\bar{x}, w_G)$, $E_p(\bar{X}, W_p)$ oraz $E_G(\bar{X}, W_G)$ pozwala zapisać różnice względnych wyników SWO w postaci

$$\Delta\Psi_{SWO}(\bar{x}, \bar{X}, G | P) = \frac{v(\bar{x}) + (1 - v(\bar{x}))w_G}{v(\bar{X}) + (1 - v(\bar{X}))w_G} - \frac{v(\bar{x}) + (1 - v(\bar{x}))w_P}{v(\bar{X}) + (1 - v(\bar{X}))w_P}. \quad (12)$$

Twierdzenie: Standaryzacja wyników ogólnych wokół średnich wojewódzkich wymusza na nas przyjęcie założenia, że średnie znormalizowane wojewódzkie prace nauczycieli szczebla gimnazjalnego i podstawowego są sobie równe (bardzo rozsądny przymus) tj.

$$W_P = W_G = W. \quad (13)$$

Dowód:

Na podstawie procedury standaryzacyjnej wzór (1) wyniki SWO wojewódzkie z egzaminu gimnazjalnego i sprawdzianu końcowego wynoszą odpowiednio:

$$E_G = \alpha \frac{\mathcal{E}_{WG}}{\mathcal{E}_{WG}} = \alpha, \quad E_P = \alpha \frac{\mathcal{E}_{WP}}{\mathcal{E}_{WP}} = \alpha, \quad \text{gdzie: } \alpha \text{ - poziom standaryzacji.}$$

Z tego wynika, że wyniki SWO wojewódzkie z egzaminu i sprawdzianu końcowego są sobie równe, czyli $E_G = E_P$. Wobec tego wykorzystując definicję wyników SWO określonych wzorami (6) i (7) otrzymujemy równanie

$$v(\bar{X}) + (1 - v(\bar{X}))w_P = v(\bar{X}) + (1 - v(\bar{X}))w_G,$$

które po przekształceniach przyjmuje postać

$$(1 - v(\bar{X}))(w_G - w_P) = 0.$$

Powyższe równanie może być prawdziwe jedynie wtedy, gdy $w_G = w_P$, co stanowi dowód tezy (13).

Wobec powyższego wzór (12) redukuje się do postaci

$$\Delta\Psi_{SWO}(\bar{x}, \bar{X}, G | P) = \frac{1}{\alpha} (1 - v(\bar{x}))(w_G - w_P). \quad (14)$$

Wartość różnicy względnych wyników SWO jest wprost proporcjonalna do różnicy znormalizowanych prac nauczycieli. Jeżeli znormalizowana praca nauczycieli na szczeblu gimnazjalnym jest większa od znormalizowanej pracy na szczeblu podstawowym wtedy następuje poprawa względnego wyniku SWO na szczeblu gimnazjalnym w stosunku do podstawowego, jeżeli natomiast praca nauczycieli na szczeblu gimnazjalnym jest mniejsza od znormalizowanej pracy na szczeblu podstawowym to wtedy następuje pogorszenie względnego wyniku SWO na szczeblu gimnazjalnym. Na podstawie pomiarów - wyników z egzaminu gimnazjalnego i sprawdzianu końcowego - potrafimy wyznaczyć wartości różnicy względnych wyników SWO a tym samym również określić, która z prac znormalizowanych jest większa: prace na szczeblu gimnazjalnym czy na szczeblu podstawowym. Nie potrafimy jednak dokładnie wyznaczyć wartości różnicy znormalizowanych prac nauczycieli, ponieważ nie znamy dokładnej wartości potencjału początkowego $v(\bar{x})$.

Na zakończenie analizy zaproponowanego modelu oszacujmy obszar, do którego należą wartości wyrażenia $\frac{1}{\alpha}(1 - v(\bar{x}))$ a które jest elementem wzoru (14). Wg autora potencjał początkowy powinien mieścić się w granicach od 0.1 do 0.3, natomiast poziom standaryzacji α dla przykładu dla województwa świętokrzyskiego za lata 2003÷2005 wynosi 0.6264. Na podstawie tych danych można wykazać, że wartości wyrażenia $\frac{1}{\alpha}(1 - v(\bar{x}))$ mieszczą się w granicach

$$1.12 \leq \frac{1}{\alpha}(1 - v(\bar{x})) \leq 1.44 . \quad (15)$$

IV. UOGÓLNIENIE MODELU

Jeżeli uznamy, co może mieć swoje uzasadnienie, że znormalizowana praca nauczycieli jest funkcją nie tylko miary pracy nauczycieli y , ale również funkcją potencjału początkowego $v(\bar{x})$ i jeżeli założymy zgodnie z warunkami, jakie ta funkcja musi spełniać, że ma ona postać np.

$$g(y, v(\bar{x})) = \frac{yv(\bar{x})}{yv(\bar{x}) + a} , \quad (16)$$

to wtedy można wykazać, że różnica względnych wyników przyjmuje formę

$$\Delta\Psi_{SWO}(\bar{x}, \bar{X}, G | P) = \frac{1}{\alpha} \frac{v(\bar{x})(1 - v(\bar{x}))}{(y_G v(\bar{x}) + a)(y_P v(\bar{x}) + a)} (y_G - y_P) , \quad (17)$$

gdzie:

- a - stała, większa od zera,
- y_G - miara pracy nauczycieli w gimnazjach gminy jako całości,
- y_P - miara pracy nauczycieli w szkołach podstawowych gminy jako całości.

Uogólniony wzór na różnice względnych wyników SWO (17) jest bardziej złożony od wzoru (14), ale istota pozostaje nadal czytelna i bez zmian. Znak różnicy względnych wyników SWO zależy wyłącznie od różnicy nakładów/jakości pracy pomiędzy szczeblem gimnazjalnym a podstawowym.

V. WNIOSKI

Zaproponowany model pomimo braku znajomości dokładnych wartości potencjałów początkowych, w sposób prosty wyjaśnia, że:

- 1) Różnica względnych wyników SWO szczebla gimnazjalnego i podstawowego danej gminy/powiatu jest wprost proporcjonalna do różnicy znormalizowanych prac/wysiłku/przekazanej wiedzy przez nauczycieli gimnazjów i szkół podstawowych z terenu danej gminy/powiatu – wzór (14).
- 2) Wpływ na różnicę (jedynie jej wartość, nie znak) względnych wyników SWO mają również potencjał początkowy gminy/powiatu oraz poziom standaryzacji wyników SWO. Znaczenie tych parametrów jest jednak mniej istotna - wzór (15).

Jeżeli uznamy, że zaproponowany model oceny efektywności nauczania jest realny, spójny i logiczny to wtedy opracowania [1]÷[2], które będą zamieszczone na stronie www.iar.pl stanowią podstawę do względnej jakościowej (i szacunkowo ilościowej) oceny poziomów nauczania pomiędzy gimnazjami a szkołami podstawowymi danej gminy jako całości czy też powiatu jako całości.

VI. BIBLIGRAFIA

1. B. Stępień, *Różnice względnych wystandaryzowanych wyników pomiędzy szkolnictwem gimnazjalnym a podstawowym w gminach województwa świętokrzyskiego za lata 2003-2005*, IAR, będzie opublikowane,
2. B. Stępień, *Różnice względnych wystandaryzowanych wyników pomiędzy szkolnictwem gimnazjalnym a podstawowym w powiatach województwa świętokrzyskiego za lata 2003-2005*, IAR, będzie opublikowane.